２０２３年度

入学試験問題 （1期）

数　　学

2023 年 2 月 2 日（木）

解答を始める前に次の注意事項を充分に読みなさい。

受験上の注意事項

1. 受験票と筆記用具以外は机上に置いてはいけません。
2. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。
3. 不正行為と認められた場合には退席を命じることがあります。
4. 「開始」の合図で、問題用紙・解答用紙を点検し、解答用紙の受験番号・氏名欄に受験番号・氏名をはっきり書いてください。
5. 問題に関する質問は不明瞭な文字等の確認以外は応じません。
6. 問題冊子の余白部分や白紙のページは、自由に使用してかまいません。
7. 試験終了時まで退席することはできません。試験終了の合図と同時に、監督者の指示にしたがって解答用紙を通路側に置いてください。
8. 身体の具合が悪くなったときは、手を挙げて監督者に申し出てください。
9. 携帯電話を持っている人は電源を切ってください。これを時計として使用することはできません。
10. 問題冊子は持ち帰ってかまいません。

答えは解答用紙の解答欄に、数値または式で記入してください。数値または式を記入するときは明確に記してください。

問題 1

次の問いに答えなさい。

(1) $(a+b+c)(a-b-c)$ を展開しなさい。

(2) $9x^2-13x+4$ を因数分解しなさい。

(3) $\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}$ の小数部分を求めなさい。

(4) 100 以上 1000 以下の 3 の倍数のうち、5 の倍数ではないものの個数を求めなさい。

(5) 次のデータの平均値を求めなさい。

4, 5, 8, 11

(6) (5) のデータの分散を求めなさい。

(7) 男子 3 人、女子 4 人の合計 7 人が 1 列に並ぶとき、男女が交互に並ぶような並び方の総数を求めなさい。

(8) 1728 と 2160 の最小公倍数を求めなさい。

問題2

2次関数 $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ がある。次の問いに答えなさい。

(1) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を求めなさい。

(2) $0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めなさい。

(3) a を正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値が (2) で求めた値と等しくなるような a の値の範囲を求めなさい。

(4) a を正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値が $3a$ と等しくなるような a の値をすべて求めなさい。

問題3

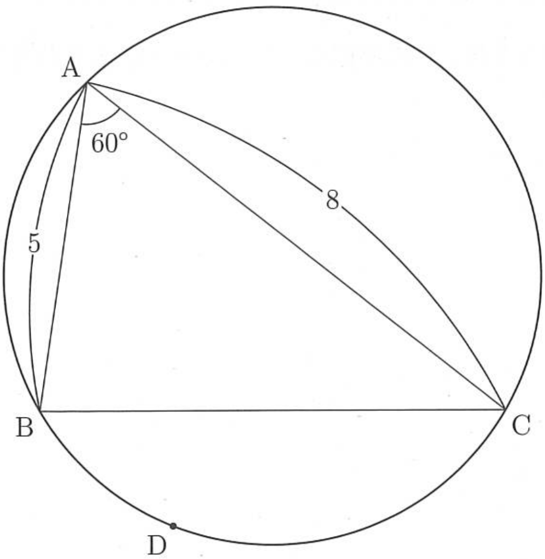
三角形 ABC があり、$AB = 5$、$AC = 8$、$\angle BAC = 60^\circ$ である。次の問いに答えなさい。

(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) 三角形 ABC の面積を求めなさい。

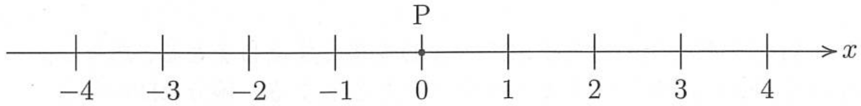
(3) 三角形 ABC の外接円の周上に $2BD = CD$ を満たす点 D をとる。ただし、点 D は直線 BC に関して点 A と反対側にあるとする。線分 BD の長さを求めなさい。

(4) D を (3) で定めた点とする。四角形 ABDC の面積を求めなさい。



問題４

数直線上に点Ｐがある。２枚のコインを１回投げて、２枚とも表が出たらＰを正の向きに１だけ動かし、２枚とも裏が出たらＰを負の向きに１だけ動かし、表と裏が１枚ずつ出たらＰを動かさない。この試行を４回行う。また、試行を始める前の段階では、Ｐは原点にある。次の問いに答えなさい。



(1) １回の試行において、Ｐを正の向きに１だけ動かす確率を求めなさい。

(2) 試行を４回行った後、Ｐの座標が４である確率を求めなさい。

(3) 試行を４回行った後、Ｐの座標が３である確率を求めなさい。

(4) 試行を４回行った後、Ｐの座標が０である確率を求めなさい。

2023年度
1期 入学試験

数 学

解答用紙

問題1	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
	(5)	
	(6)	
	(7)	
	(8)	
問題2	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
問題3	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
問題4	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	

志望学部・学科	受験番号	氏　名
第1		
第2		
第3		

合計点

※太枠内を記入

2023年度　1期　入学試験

数学

正答

問題1	(1)	$a^2-b^2-2bc-c^2$
	(2)	$(9x-4)(x-1)$
	(3)	$\sqrt{7}-\frac{5}{2}$
	(4)	240
	(5)	7
	(6)	7.5
	(7)	144
	(8)	8640
問題2	(1)	$(2,\ 1)$
	(2)	9
	(3)	$0<a\leqq 4$
	(4)	$3,\ \frac{9}{2}$
問題3	(1)	7
	(2)	$10\sqrt{3}$
	(3)	$\sqrt{7}$
	(4)	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$
問題4	(1)	$\frac{1}{4}$
	(2)	$\frac{1}{256}$
	(3)	$\frac{1}{32}$
	(4)	$\frac{35}{128}$

2023年度　1期　入学試験

数 学

解説

問題 1

(1)
$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(a-b-c)\\
&=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\\
&=a^2-(b+c)^2\\
&=a^2-(b^2+2bc+c^2)\\
&=\boldsymbol{a^2-b^2-2bc-c^2.}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{array}{ccc}
9 & -4 & -4\\
1 & -1 & -9\\
\hline
9 & 4 & -13
\end{array}
$$

$$9x^2-13x+4=\boldsymbol{(9x-4)(x-1).}$$

(3) $2.5=\sqrt{6.25}<\sqrt{7}<\sqrt{9}=3$ より，

$$3<\sqrt{7}+\frac{1}{2}<3.5.$$

よって，$\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}$ の整数部分は 3 である．

したがって，$\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}$ の小数部分は

$$\left(\sqrt{7}+\frac{1}{2}\right)-3=\boldsymbol{\sqrt{7}-\frac{5}{2}.}$$

(4) 100 以上 1000 以下の 3 の倍数は

$$3\cdot34,\ 3\cdot35,\ \cdots,\ 3\cdot333$$

の 300 個あり，そのうち，5 の倍数でもあるものは

$$3\cdot5\cdot7,\ 3\cdot5\cdot8,\ \cdots,\ 3\cdot5\cdot66$$

の 60 個ある．

したがって，100 以上 1000 以下の 3 の倍数のうち，5 の倍数ではないものの個数は

$$300-60=\boldsymbol{240.}$$

(5)
$$\frac{1}{4}\cdot(4+5+8+11)=\boldsymbol{7.}$$

(6) (5) のデータの平均値は 7 であるから，(5) のデータの分散は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\cdot\{(4-7)^2+(5-7)^2\\
&\qquad+(8-7)^2+(11-7)^2\}\\
&=\frac{1}{4}\cdot(9+4+1+16)\\
&=\frac{15}{2}\\
&=\boldsymbol{7.5.}
\end{aligned}
$$

(7) 男子 3 人，女子 4 人が交互に並ぶとき，男女の間での並び順は

女男女男女男女

となる．

この並びにおいて，男子 3 人の並び方は $3!$ 通りあり，女子 4 人の並び方は $4!$ 通りある．

したがって，男子 3 人，女子 4 人が交互に並ぶような並び方の総数は

$$
\begin{aligned}
3!\cdot4!&=(3\cdot2\cdot1)\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)\\
&=\boldsymbol{144.}
\end{aligned}
$$

(8) $1728=432\cdot4$，$2160=432\cdot5$ であるから，1728 と 2160 の最小公倍数は

$$432\cdot4\cdot5=\boldsymbol{8640.}$$

2023 年度　1 期　入学試験

数 学

解説

問題２

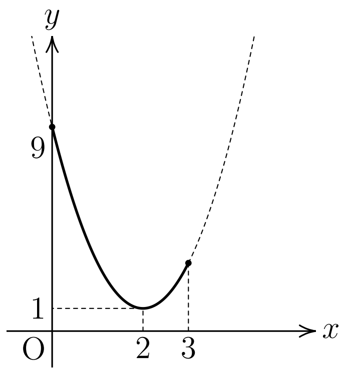
(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 9 \\ &= 2(x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

より，$y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\mathbf{(2,\ 1).}$$

(2) $y = f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 3$ の部分は次の図の太線部分のようになる．

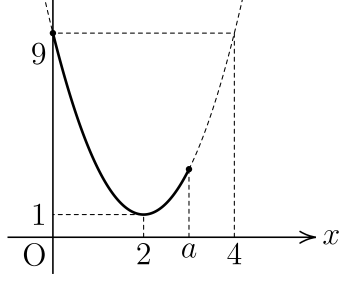


よって，$0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値は

$$\mathbf{9.}$$

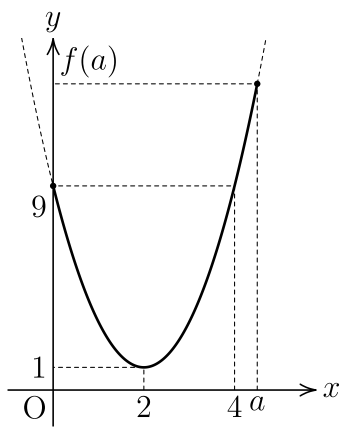
(3) $0 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最大値を M とする．M は次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 4$ のとき．



$M = 9$ である．

(ii) $4 < a$ のとき．



$M = f(a)$ であり，$f(a) > 9$ である．

(i)，(ii) より，M が (2) で求めた値である 9 と等しくなるような a の値の範囲は

$$\mathbf{0 < a \leqq 4.}$$

(4) (3) の M に対して，$M = 3a$ となるような a の値を次の 2 つの場合に分けて求める．

(I) $0 < a \leqq 4$ のとき．

(3) の (i) と $M = 3a$ より，

$$9 = 3a.$$

$$a = 3.$$

これは $0 < a \leqq 4$ を満たす．

(II) $4 < a$ のとき．

(3) の (ii) と $M = 3a$ より，

$$f(a) = 3a.$$

$$2a^2 - 8a + 9 = 3a.$$

$$(2a-9)(a-1) = 0.$$

$4 < a$ であるから，

$$a = \frac{9}{2}.$$

(I)，(II) より，$M = 3a$ となるような a の値は

$$\mathbf{3,\ \frac{9}{2}.}$$

数 学

解説

問題 3

(1)　三角形 ABC に対して余弦定理を用いると，

$$\mathrm{BC}^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot \cos 60^\circ$$
$$= 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{1}{2}$$
$$= 49.$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから，

$$\mathrm{BC} = \mathbf{7}.$$

(2)　三角形 ABC の面積を S とすると，

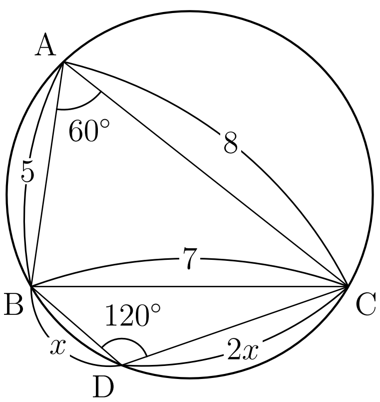
$$S = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{10\sqrt{3}}.$$

(3)　四角形 ABDC は円に内接しているから，

$$\angle\mathrm{BDC} = 180^\circ - \angle\mathrm{BAC}$$
$$= 180^\circ - 60^\circ$$
$$= 120^\circ.$$

$x = \mathrm{BD}$ とおくと，$2\mathrm{BD} = \mathrm{CD}$ により，

$$\mathrm{CD} = 2x.$$



三角形 BCD に対して余弦定理を用いると，

$$7^2 = x^2 + (2x)^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot \cos 120^\circ.$$
$$7^2 = x^2 + (2x)^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot \left(-\frac{1}{2}\right).$$
$$x^2 = 7.$$

$x = \mathrm{BD}$ であるから，

$$\mathrm{BD}^2 = 7.$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから，

$$\mathrm{BD} = \boldsymbol{\sqrt{7}}.$$

(4)　三角形 BCD の面積を T とすると，

$$T = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot \sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

これと (2) の S を用いることにより，四角形 ABDC の面積は

$$S + T = 10\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{27\sqrt{3}}{2}}.$$

2023年度　1期　入学試験

数 学

$\boxed{\text{解説}}$

問題4

以下，1回の試行において，

Pを正の向きに1だけ動かすことを $\boxed{+1}$，

Pを負の向きに1だけ動かすことを $\boxed{-1}$，

Pを動かさないことを $\boxed{0}$

と表す．

(1) $\boxed{+1}$ が起こるのは，コインが2枚とも表の場合である．

よって，$\boxed{+1}$ が起こる確率は

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}}.$$

(2) 試行を4回行った後，Pの座標が4であるのは，4回とも $\boxed{+1}$ となる場合である．

よって，試行を4回行った後，Pの座標が4である確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \boldsymbol{\frac{1}{256}}.$$

(3) (1)に加えて，$\boxed{0}$ が起こる確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である．

試行を4回行った後，Pの座標が3であるのは，3回が $\boxed{+1}$ で1回が $\boxed{0}$ となる場合である．

よって，試行を4回行った後，Pの座標が3である確率は

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} &= 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{32}}. \end{aligned}$$

(4) (1)と(3)に加えて，$\boxed{-1}$ が起こる確率は

$$\frac{1}{4}$$

である．

試行を4回行った後，Pの座標が0であるのは，次の3つの場合のいずれかである．

(Ⅰ) 4回とも $\boxed{0}$．

(Ⅱ) $\boxed{+1}$ と $\boxed{-1}$ が1回ずつで，残り2回が $\boxed{0}$．

(Ⅲ) $\boxed{+1}$ と $\boxed{-1}$ が2回ずつ．

(Ⅰ)となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

(Ⅱ)となる確率は

$$\begin{aligned} &\frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

(Ⅲ)となる確率は

$$\begin{aligned} {}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 &= \frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{128}. \end{aligned}$$

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)はどの2つも互いに排反であるから，試行を4回行った後，Pの座標が0である確率は

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{128} = \boldsymbol{\frac{35}{128}}.$$