2024年度

入学試験問題 （1期）

数　　　学

2024年2月5日（月）

解答を始める前に次の注意事項を充分に読みなさい。

受験上の注意事項

1．受験票と筆記用具以外は机上に置いてはいけません。

2．試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけません。

3．不正行為と認められた場合には退席を命じることがあります。

4．「開始」の合図で、問題冊子・解答用紙を点検し、解答用紙の受験番号・氏名欄に受験番号・氏名をはっきり書いてください。

5．問題に関する質問は不明瞭な文字等の確認以外は応じません。

6．問題冊子の余白部分や白紙のページは、自由に使用してかまいません。

7．試験終了時まで退席することはできません。試験終了の合図と同時に、監督者の指示にしたがって解答用紙を通路側に置いてください。

8．身体の具合が悪くなったときは、手を挙げて監督者に申し出てください。

9．携帯電話を持っている人は電源を切ってください。これを時計として使用することはできません。

10．問題冊子は持ち帰ってかまいません。

答えは解答用紙の解答欄に、数値または式で記入してください。数値または式を記入するときは明確に記してください。

問題 1

次の問いに答えなさい。

(1) $(x^2-x+2)(x^2+x-2)$ を展開しなさい。

(2) $x^2+5xy-6y^2$ を因数分解しなさい。

(3) 実数 x についての不等式 $|x+2|<3$ を解きなさい。

(4) n を正の整数とする。命題「n^2 が 50 の倍数 ならば n が 50 の倍数」は偽の命題である。この命題の反例になる n の値のうち、最小のものを答えなさい。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき、θ についての方程式 $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ の解の総和を求めなさい。

(6) 次のデータの第 3 四分位数を求めなさい。

$$1,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9$$

(7) 赤球 3 個、白球 2 個、青球 2 個の合計 7 個の球を 1 列に並べるとき、並べ方の総数を求めなさい。

(8) 1 と書かれたカードが 1 枚、2 と書かれたカードが 3 枚、3 と書かれたカードが 4 枚、4 と書かれたカードが 1 枚の合計 9 枚のカードが入った袋がある。この袋から 3 枚のカードを取り出すとき、取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和が 3 の倍数になる確率を求めなさい。

問題２

　a を実数の定数とする。実数 x についての２次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 1$ に対して、次の問いに答えなさい。

(1) $a = 2$ のとき、x についての２次不等式 $f(x) < 0$ を解きなさい。

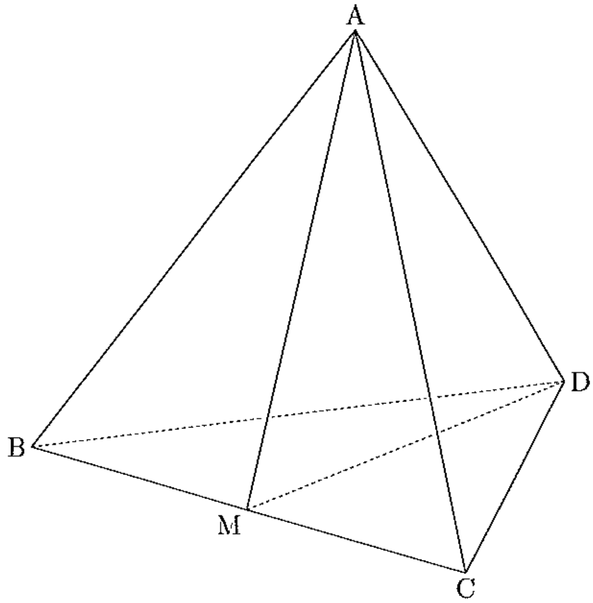
(2) $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標を、a を用いて表しなさい。

(3) すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

(4) $x \geqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x) > 0$ が成り立つような a の値の範囲を求めなさい。

問題３

１辺の長さが２である正四面体ABCDがあり、辺BCの中点をMとする。次の問いに答えなさい。



(1) 線分AMの長さを求めなさい。

(2) $\cos\angle\mathrm{AMD}$ の値を求めなさい。

(3) 三角形AMDの面積を求めなさい。

(4) 線分BM(両端除く)上に点Eをとり、$\mathrm{BE}=x$ とおく。四面体ADEMの体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ となるような x の値を求めなさい。

問題4

10人の学生に対して、1日の勉強時間を申告してもらったところ、結果は次の(表1)のようになった。以下、1日の勉強時間をxと表すことにする。

(表1)

学生名	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x (時間)	0.5	1.5	1.5	2.5	2.5	2.5	2.5	3.5	3.5	4.5

(1) (表1)の結果に対して、xの平均値を求めなさい。

(2) (表1)の結果に対して、xの分散を求めなさい。

(3) (表1)の結果が出た後に、AさんとJさんの2人から、自分の申告が誤っていたので訂正したいとの申し出があった。その申し出を受けて(表1)の結果を訂正したところ、xの平均値は訂正前と変わらず、xの分散は0.6となった。さらに、AさんよりもJさんの方が、1日の勉強時間が少ないことも判明した。以上のことを踏まえて、(表1)の結果を訂正したところ、次の(表2)のようになった。

(表2)

学生名	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x (時間)	$\boxed{ア}$	1.5	1.5	2.5	2.5	2.5	2.5	3.5	3.5	$\boxed{イ}$

(表2)の空欄 $\boxed{ア}$ に当てはまる数を答えなさい。

(4) (3)の(表2)の空欄 $\boxed{イ}$ に当てはまる数を答えなさい。

2024年度
1期 入学試験

数学

解答用紙

問題1	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
	(5)	
	(6)	
	(7)	
	(8)	
問題2	(1)	
	(2)	

問題2	(3)	
	(4)	
問題3	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	
問題4	(1)	
	(2)	
	(3)	
	(4)	

	志望学部・学科	受験番号	氏名
	第1		
	第2		
	第3		

合計点

※太枠内を記入

2024年度　1期　入学試験

数 学

正答

問題1	(1)	$x^4 - x^2 + 4x - 4$
	(2)	$(x+6y)(x-y)$
	(3)	$-5 < x < 1$
	(4)	10
	(5)	$180°$
	(6)	8.5
	(7)	210
	(8)	$\frac{29}{84}$
問題2	(1)	$1 < x < 3$
	(2)	$(a,\ -a^2+a+1)$
	(3)	$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	(4)	$a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
問題3	(1)	$\sqrt{3}$
	(2)	$\frac{1}{3}$
	(3)	$\sqrt{2}$
	(4)	$\frac{3}{4}$
問題4	(1)	2.5
	(2)	1.2
	(3)	3.5
	(4)	1.5

数 学

解説

問題 1

(1)
$$\begin{aligned}&(x^2-x+2)(x^2+x-2)\\&=\{x^2-(x-2)\}\{x^2+(x-2)\}\\&=(x^2)^2-(x-2)^2\\&=x^4-(x^2-4x+4)\\&=\boldsymbol{x^4-x^2+4x-4.}\end{aligned}$$

(2) $x^2+5xy-6y^2=\boldsymbol{(x+6y)(x-y).}$

(3) $|x+2|<3$ より，

$$-3<x+2<3.$$

よって，$|x+2|<3$ の解は，

$$\boldsymbol{-5<x<1.}$$

(4) $50=2\cdot 5^2$ であるから，n^2 が50の倍数となるための条件は n が $2\cdot 5$ の倍数となることである．

したがって，「n^2 が50の倍数　ならば　n が50の倍数」の反例となる n の値は，10の倍数であるが50の倍数ではない正の整数である．

よって，その反例となる n の値のうち，最小のものは，

$$\mathbf{10.}$$

(5) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ を満たす鋭角を α とする．

$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ の解は，

$$\theta=\alpha,\ 180^\circ-\alpha$$

と表せて，これらの総和は，

$$\alpha+(180^\circ-\alpha)=\mathbf{180^\circ.}$$

(6) 8，8，9，9の中央値を求めればよいから，求める第3四分位数は，

$$\frac{8+9}{2}=\mathbf{8.5.}$$

(7)
$$\frac{7!}{3!2!2!}=\mathbf{210}\ (\text{通り}).$$

(8) 取り出した3枚のカードに書かれた数の和が3の倍数になるのは，3枚のカードに書かれた数がすべて等しくなる場合と，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，「$\boxed{1}$ か $\boxed{4}$」の3枚を取り出す場合のいずれかであるから，求める確率は，

$$\frac{({}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_3)+3\cdot 4\cdot 2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\boldsymbol{\frac{29}{84}}.$$

数 学

解説

問題２

(1)　$a=2$ のとき，$f(x)=x^2-4x+3$.

このとき，$f(x)<0$ を解くと，

$$x^2-4x+3<0.$$

$$(x-1)(x-3)<0.$$

$$\boldsymbol{1<x<3.}$$

(2)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax+a+1 \\ &= (x-a)^2-a^2+a+1 \end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\boldsymbol{(a,\ -a^2+a+1).}$$

(3)　$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるから，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は，

$$D<0. \qquad \cdots①$$

ただし，D は x についての 2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式である.

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-1\cdot(a+1)=a^2-a-1$ であるから，① より，

$$a^2-a-1<0.$$

これを解くと，

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

(4)　$x\geqq 1$ に $y=f(x)$ のグラフの軸が含まれるか否かで場合分けを行う.

(i)　$a<1$ のとき.

$x\geqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は，

$$f(1)>0. \qquad \cdots②$$

$f(1)=-a+2$ であるから，② より，

$$-a+2>0.$$

$$a<2.$$

これと $a<1$ の共通部分は，

$$a<1.$$

(ii)　$1\leqq a$ のとき.

$x\geqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つための条件は，① である.

(3) の結果より，① を満たす a の値の範囲は，

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

これと $1\leqq a$ の共通部分は，

$$1\leqq a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

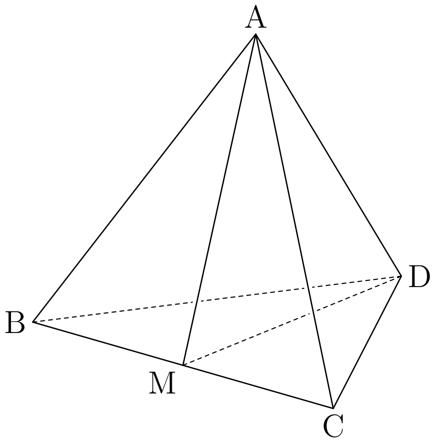
(i)，(ii) より，$x\geqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つような a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

数 学

解説

問題３



(1) 三角形 ABC は 1 辺の長さが 2 の正三角形であるから，

$$\mathrm{AM} = \boldsymbol{\sqrt{3}}.$$

(2) 三角形 DBC は 1 辺の長さが 2 の正三角形であるから，

$$\mathrm{DM} = \sqrt{3}.$$

また，線分 AD は正四面体 ABCD の 1 辺であるから，

$$\mathrm{AD} = 2.$$

これらのことと (1) の結果より，三角形 AMD に対して余弦定理を用いると，

$$\cos\angle\mathrm{AMD} = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

(3) (2) の結果より，

$$\sin\angle\mathrm{AMD} = \sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AMD}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

よって，三角形 AMD の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AM}\cdot\mathrm{DM}\cdot\sin\angle\mathrm{AMD} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\sqrt{2}}.$$

(4) E は線分 BM(両端除く) 上の点であるから，

$$0 < \mathrm{BE} < \mathrm{BM}$$

すなわち，

$$0 < x < 1 \qquad \cdots ①$$

を満たす．

また，AM⊥BC，DM⊥BC であるから，平面 AMD は直線 BC と垂直になるので，四面体 ADEM の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\,\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{EM} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot(1-x).$$

これが $\frac{\sqrt{2}}{12}$ となることより，

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot(1-x) = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

これより，

$$x = \frac{3}{4}. \qquad \cdots ②$$

①，② より，求める x の値は，

$$\boldsymbol{\frac{3}{4}}.$$

数 学

解説

問題４

(1) $\overline{x}$

$$= \frac{0.5 + 1.5 \cdot 2 + 2.5 \cdot 4 + 3.5 \cdot 2 + 4.5}{10}$$

$$= \mathbf{2.5.}$$

(2) ${s_x}^2$

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2 + 2^2}{10}$$

$$= \mathbf{1.2.}$$

(3) $\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる数を a，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数を b とおく．

訂正前も訂正後も

$$\overline{x} = 2.5$$

であるから，

$$a + b = 0.5 + 4.5$$

すなわち，

$$b = 5 - a. \qquad \cdots ①$$

訂正後は

${s_x}^2$

$$= \frac{(a-2.5)^2 + (-1)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2 + (b-2.5)^2}{10}$$

$$= \frac{(a-2.5)^2 + (b-2.5)^2 + 4}{10}$$

と表せて，さらに，

$${s_x}^2 = 0.6$$

であるから，

$$\frac{(a-2.5)^2 + (b-2.5)^2 + 4}{10} = 0.6$$

すなわち，

$$(a-2.5)^2 + (b-2.5)^2 = 2. \qquad \cdots ②$$

さらに，

$$a > b \qquad \cdots ③$$

であることも判明している．

① を ② に代入すると，

$$(a-2.5)^2 + \{(5-a) - 2.5\}^2 = 2.$$
$$(a-2.5)^2 + (a-2.5)^2 = 2.$$
$$2(a-2.5)^2 = 2.$$
$$(a-2.5)^2 = 1.$$
$$a - 2.5 = \pm 1.$$
$$a = 3.5,\ 1.5.$$

これと ① より，

$$(a,\ b) = (3.5,\ 1.5),\ (1.5,\ 3.5).$$

さらに，③ より，

$$(a,\ b) = (3.5,\ 1.5).$$

よって，$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる数は，

$$\mathbf{3.5.}$$

(4) (3) より，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる数は，

$$\mathbf{1.5.}$$